Variável Instrumental: LATE

IBM0288 - 2026.2

Prof. Raphael Gouvea

0.1 Aula passada: MQ2E

Suponha que Z_i satisfaça as duas condições para um instrumento válido:

- **Relevância:** $\text{corr}(Z_i, X_i) \neq 0$
- **Exogeneidade:** $\text{corr}(Z_i, u_i) = 0$

Mínimos Quadrados em Dois Estágios:

Estágio 1: Regrida X_i em Z_i por MQO $\longrightarrow$ obtenha $\hat{X}_i = \hat{\pi}_0 + \hat{\pi}_1 Z_i$

Estágio 2: Regrida Y_i em $\hat{X}_i$ por MQO $\longrightarrow$ obtenha $\hat{\beta}_1^{MQ2E}$

Os coeficientes do segundo estágio são os estimadores de MQ2E, mas os **erros-padrão estão errados** (usar comando único no R).

0.2 Aula passada: inferência causal

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \cdots + \beta_k X_{ki} + \beta_{k+1} W_{1i} + \cdots + \beta_{k+r} W_{ri} + u_i$$

1. $E(u_i \mid W_{1i}, ..., W_{ri}) = 0$ — "os regressores exógenos são exógenos"
2. $(Y_i, X_{1i}, ..., X_{ki}, W_{1i}, ..., W_{ri}, Z_{1i}, ..., Z_{mi})$ são i.i.d.
3. Os X's, W's, Z's e Y têm momentos de 4ª ordem não nulos e finitos.
4. Os instrumentos $(Z_{1i}, ..., Z_{mi})$ são válidos.

Sob as hipóteses 1–4, o MQ2E e sua estatística t são normalmente distribuídos em amostras grandes.

0.3 Modelos não fazem mágica

- Angrist (1990): primeiro uso de aleatorização como instrumento

```
- Efeito do serviço militar no Vietnã sobre a renda
- Serviço voluntário (em tempos normais) implica seleção e efeitos heterogêneos
- Instrumento: número sorteado na loteria do alistamento (randomização física)
```

- Na época, o uso de IV era descuidado: alguns artigos nem diziam qual era o instrumento
- Para Angrist, o instrumento é um mecanismo real de atribuição ao tratamento, não uma formalidade estatística
- O MQ2E não cria variação exógena! Ele só aproveita **a aleatoriedade que já existe no mundo** (*experimento natural*).
- O trabalho do pesquisador é encontrar essa aleatoriedade e usá-la para responder perguntas relevantes para políticas públicas

0.4 IV não identifica ATE

- Heckman (1990): "identificação no infinito"

  - IV só identifica o ATE se Z levar quase toda a população para dentro ou para fora do tratamento ou se assumir efeitos homogêneos.
  - Na prática há não cumprimento: nem todo sorteado serviu
- Imbens & Angrist (1994): então, o que o IV estima?
  - Efeito individual: $\delta_i = Y_i^1 - Y_i^0$
  - Status de tratamento potencial: D_i^1 (se $Z_i = 1$) e D_i^0 (se $Z_i = 0$)
  - $D_i = D_i^0 + (D_i^1 - D_i^0)Z_i$

0.5 Quatro Grupos

- *Compliers* ($D^1 = 1, D^0 = 0$): serviram por causa do sorteio
- *Always-takers* ($D^1 = D^0 = 1$): patriotas, servem de qualquer jeito
- *Never-takers* ($D^1 = D^0 = 0$): isentos por motivo de saúde
- *Defiers* ($D^1 = 0, D^0 = 1$): descartados pela monotonicidade

0.6 Teorema LATE

$$\delta_{IV} = \frac{E[Y_i(D_i^1, 1) - Y_i(D_i^0, 0)]}{E[D_i^1 - D_i^0]} = E\left[\, Y_i^1 - Y_i^0 \mid D_i^1 - D_i^0 = 1 \,\right]$$

- IV estima o efeito médio para os **compliers**: quem muda de status por causa de Z
- **Efeito Local**: sem hipóteses extras, nada diz sobre always-takers ou never-takers
- Com efeitos homogêneos, LATE = ATE; com efeitos heterogêneos, em geral LATE $\neq$ ATE
- Se o LATE é o parâmetro de política relevante depende da pergunta que se quer responder

0.7 Cinco hipóteses do teorema LATE

1. **SUTVA:** sem spillovers de Z ou D entre pessoas
   - Violação: eu me alisto porque meu amigo foi sorteado
2. **Independência:** $\{Y_i(D_i^1, 1), Y_i(D_i^0, 0), D_i^1, D_i^0\} \perp\!\!\!\perp Z_i$
   - Forma reduzida e o 1º estágio causais como efeitos *de* Z
3. **Exclusão:** $Y_i(d, 0) = Y_i(d, 1)$ para $d = 0, 1$
   - Violação: sorteados estudam mais para conseguir adiamento
   - Instrumento aleatório $\neq$ exclusão satisfeita
4. **Relevância:** $E[D_i^1 - D_i^0] \neq 0$ (a única testável)
5. **Monotonicidade:** $D_i^1 \geq D_i^0$ para todo i (ou $\leq$ para todo i)
   - O instrumento empurra todos na mesma direção: não há *defiers*

1 Escolas charter e o debate sobre educação

Ref: Seção 3.1 de Angrist, J. D., Pischke, J.-S. Mastering metrics: the path from cause to effect.

1.1 KIPP: escolas charter e o debate sobre educação

- **KIPP** (Knowledge Is Power Program): rede de escolas públicas charter nos EUA
  - 95% dos alunos são negros ou hispânicos; 80% vivem em situação de pobreza
- Escolas *charter* são públicas, com maior autonomia curricular e de gestão; muitas seguem o modelo **No Excuses** (mais tempo de aula, disciplina, foco em leitura/matemática).

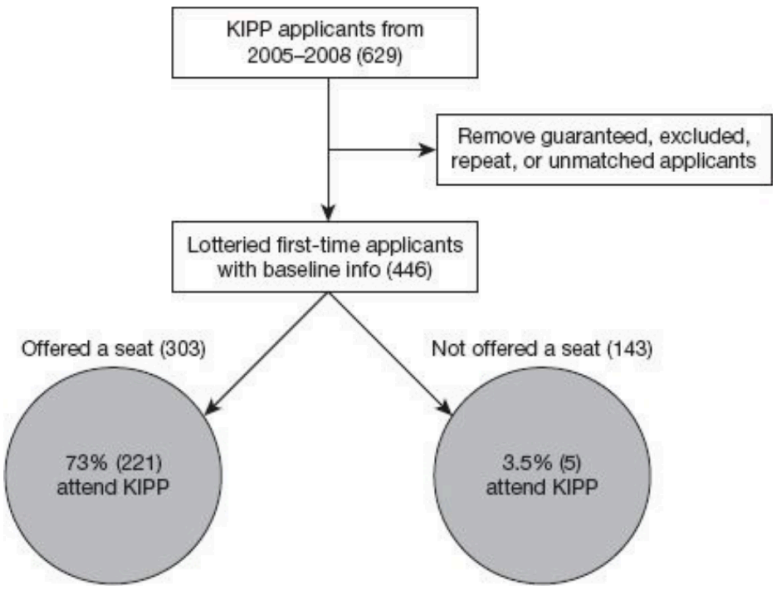
- Questão empírica: **frequentar uma escola charter melhora o desempenho?**
  - **Defensores:** charter eleva significativamente o desempenho de minorias
  - **Céticos:** charter atrai famílias mais motivadas, i.e., o sucesso seria **viés de seleção**
- Desafio de identificação: **autosseleção** de famílias/alunos → comparação simples entre charter e escolas tradicionais é viesada.

1.2 Loterias de admissão: desenho quase-experimental

- Em Massachusetts, quando há excesso de demanda, por lei as **vagas charter são sorteadas**.
  - cerca de 200 candidatos para 90 vagas anuais
- A loteria cria variação aleatória no acesso à charter: exatamente o que precisamos!
  - nem todos os ganhadores se matriculam e alguns perdedores entram por outras vias (irmãos)
  - ganhadores têm maior probabilidade de matrícula do que perdedores.
- O sorteio é um **instrumento** para **matrícula em charter**!
- Objetivo: estimar o **efeito causal** de **estudar em uma charter** sobre **aprendizado**.

1.3 Estudo aplicado: KIPP Lynn

- Angrist e coautores coletaram dados entre 2005 e 2008 para a escola KIPP em Lynn/MA.



Note: Numbers of Knowledge Is Power Program (KIPP) applicants are shown in parentheses.

1.4 Balanceamento de covariáveis: ganhadores ≈ perdedores

		KIPP applicants			
	Lynn public fifth graders (1)	KIPP Lynn lottery winners (2)	Winners vs. losers (3)	Attended KIPP (4)	Attended KIPP vs. others (5)
Panel A. Baseline characteristics					
Hispanic	.418	.510	−.058 (.058)	.539	.012 (.054)
Black	.173	.257	.026 (.047)	.240	−.001 (.043)
Female	.480	.494	−.008 (.059)	.495	−.009 (.055)
Free/Reduced price lunch	.770	.814	−.032 (.046)	.828	.011 (.042)
Baseline math score	−.307	−.290	.102 (.120)	−.289	.069 (.109)
Baseline verbal score	−.356	−.386	.063 (.125)	−.368	.088 (.114)

Colunas (1), (2) e (4) reportam as médias. A coluna (3) apresenta as diferenças entre os sorteados e os não sorteados. Esses são coeficientes de regressões que controlam para grupos de risco, ou seja, variáveis dummy para ano e série de inscrição e a presença de um irmão candidato. A coluna (5) apresenta as diferenças entre os alunos da KIPP e os candidatos que não frequentaram a KIPP. Os erros-padrão são reportados entre parênteses.

1.5 Validade do instrumento

Condições para a validade do instrumento:

- Primeiro estágio: Z_i tem efeito causal sobre D_i
- Independência: Z_i é como se fosse aleatório — não correlacionado com variáveis omitidas
- Restrição de exclusão: Z_i afeta Y_i **somente** através de D_i

Observação: Os dois últimos pontos são equivalentes à condição de exogeneidade da aula anterior.

Condição	No estudo KIPP	Verificável?
Primeiro estágio	Oferta aumenta frequência em 74 p.p.	✓ Sim
Independência	Loteria aleatória ⟶ balanceamento	✓ Sim
Restrição de exclusão	Oferta só melhora notas via frequência	✗ Não

1.6 Resultados: diferença de médias

Panel B. Outcomes					
Attended KIPP	.000	.787	.741 (.037)	1.000	1.000 —
Math score	−.363	−.003	.355 (.115)	.095	.467 (.103)
Verbal score	−.417	−.262	.113 (.122)	−.211	.211 (.109)
Sample size	3,964	253	371	204	371

Colunas (1), (2) e (4) reportam as médias. A coluna (3) apresenta as diferenças entre os sorteados e os não sorteados. Esses são coeficientes de regressões que controlam para grupos de risco, ou seja, variáveis dummy para ano e série de inscrição e a presença de um irmão candidato. A coluna (5) apresenta as diferenças entre os alunos da KIPP e os candidatos que não frequentaram a KIPP. Os erros-padrão são reportados entre parênteses.

1.7 Resultados: VI

O **efeito local médio do tratamento** (LATE) é definido como:

$$\lambda = \frac{\rho}{\phi} = \frac{E[Y_i \mid Z_i = 1] - E[Y_i \mid Z_i = 0]}{E[D_i \mid Z_i = 1] - E[D_i \mid Z_i = 0]}$$

- Numerador (ρ): efeito da oferta sobre os resultados (**forma reduzida**)
- Denominador (ϕ): efeito da oferta sobre o tratamento (**primeiro estágio**)

Usando dados da tabela anterior:

$$\lambda = \frac{\rho}{\phi} = \frac{0,355}{0,741} \approx \mathbf{0,48\sigma}$$

Um ganho de **quase meio desvio-padrão** em matemática em um ano letivo!

1.8 A quem se aplica o LATE?

TABLE 3.2

The four types of children

		Lottery losers $Z_i = 0$	
		Doesn't attend KIPP $D_i = 0$	Attends KIPP $D_i = 1$
Lottery winners $Z_i = 1$	Doesn't attend KIPP $D_i = 0$	Never-takers (*Normando*)	Defiers
	Attends KIPP $D_i = 1$	Compliers (*Camila*)	Always-takers (*Alvaro*)

- *Never-takers*: escolha da escola não é influenciada pela loteria, pois eles não vão para charter de forma alguma
- *Always-takers*: mesmo que percam a loteria, encontram uma forma de se matricular na charter
- *Compliers*: seguem o resultado da loteria - se matriculam se são sorteados e não se matriculam se não são sorteados
- *Defiers*: se matriculam se não são sorteados, não se matriculam se são sorteados

> ! LATE = efeito para os compliers
>
> O instrumento não tem poder de mudar o tratamento de never-takers nem always-takers. O LATE captura o efeito causal **apenas para os compliers** — aqueles cuja decisão de frequentar a KIPP é determinada pela loteria.

1.9 LATE vs TOT

LATE = $E[Y_{1i} - Y_{0i} \mid C_i = 1]$: efeito para os compliers

TOT (Treatment effect on the Treated) = $E[Y_{1i} - Y_{0i} \mid D_i = 1]$: efeito para todos os tratados (compliers + always-takers)

> ! LATE $\neq$ TOT
>
> O efeito médio local do tratamento e o efeito do tratamento sobre os tratados são, em geral, diferentes, pois os tratados incluem always-takers, que podem ter efeitos diferentes dos compliers sem hipóteses adicionais.

1.10 Validade externa

O LATE estimado para a KIPP Lynn pode não se generalizar para:

- Outras escolas charter com perfil diferente
- Regiões com menor concentração de pobreza
- Expansão da rede para um público diferente

> **Dica**
>
> A relevância de um LATE depende de **quem são os compliers** e se eles representam bem a população de interesse para políticas públicas.

2 Fertilidade e investimento em educação

Ref: Seção 3.3 de Angrist, J. D., Pischke, J.-S. Mastering metrics: the path from cause to effect.

2.1 Tamanho da família e educação dos filhos

- **Questão:** ter mais irmãos prejudica a educação dos filhos? (*trade-off quantidade-qualidade*)
- **Teoria de Becker:** pais com menos filhos investem mais em cada um (saúde, educação)
- **Correlação MQO:** cada filho adicional reduz ~0,25 ano de escolaridade do primogênito

2.2 Problema de identificação

- Famílias maiores diferem das menores em muitas características não observáveis
- Mães com mais filhos tendem a ter menos escolaridade
- Filhos de mães menos escolarizadas tendem a ter menos escolaridade
- **Viés de seleção**: a correlação negativa pode não refletir causalidade

Experimento ideal: sortear aleatoriamente bebês extras para famílias com um filho já existente.

2.3 Experimento natural e VI: gêmeos

Gêmeos no 2º nascimento: $Z_i = 1$ se a segunda gestação for de gêmeos

- Gêmeos representam um choque exógeno no tamanho da família
  - Ninguém planeja ter gêmeos
  - Correlacionados com algumas características da mãe (idade e etnia)
- Aumenta o número médio de filhos em ~0,32
  - Não 1, pois ~70% das famílias planejavam ter 3+ filhos de qualquer forma
- Primeiro estágio sem controles: 0,320; **com controles: 0,437**

2.4 Experimento natural e VI: composição de sexo

Composição de sexo dos dois primeiros filhos: $W_i = 1$ se os dois primeiros filhos são do mesmo sexo

- Pais preferem ter pelo menos um casal
  - famílias cujos dois primeiros filhos são do mesmo sexo têm maior probabilidade de ter um 3º filho

- O sexo do recém-nascido é **essencialmente aleatório!**
- Primeiro estágio sem controles: 0,079; **com controles: 0,073**

Atenção: No livro de Stock e Watson (aulas passadas), W é usado para representar as variáveis de controle. Neste exemplo do livro de Angrist e Pischke, W é usado para diferenciar os dois instrumentos.

2.5 Resultados: forma reduzida

Instrumento gêmeos:

- Primogênitos criados em famílias com gêmeos **não têm** menor escolaridade do que aqueles em famílias com apenas um irmão.
- Forma reduzida ≈ 0

Instrumento filhos do mesmo sexo:

- A escolaridade média dos primogênitos é praticamente igual entre famílias com filhos de mesmo sexo e de sexos diferentes (ambas ≈ 12,6 anos).
- Forma reduzida ≈ 0

. . .

LATE = 0

Se a forma reduzida é zero, o LATE também é zero: $\lambda = \rho/\phi \approx 0/\phi = 0$.

Conclusão: Nenhuma evidência de trade-off quantidade-qualidade!

2.6 MQ2E: um instrumento

O método de Mínimos Quadrados em Dois Estágios (MQ2E) generaliza o método de VI em duas dimensões:

1. Combina **múltiplos instrumentos** eficientemente
2. Incorpora **covariáveis de controle**

Com um instrumento (Z_i) e controle (A_i = idade da mãe):

Forma reduzida: $Y_i = \alpha_0 + \rho Z_i + \gamma_0 A_i + e_{0i}$

Primeiro estágio: $D_i = \alpha_1 + \phi Z_i + \gamma_1 A_i + e_{1i}$

Valores preditos: $\hat{D}_i = \alpha_1 + \hat{\phi} Z_i + \hat{\gamma}_1 A_i$

Segundo estágio: $Y_i = \alpha_2 + \lambda_{MQ2E} \hat{D}_i + \gamma_2 A_i + e_{2i}$

Resultado: $\lambda_{MQ2E} = \hat{\rho}/\hat{\phi}$: o mesmo LATE, agora com controles!

2.7 MQ2E: dois instrumentos

Com dois instrumentos (Z_i gêmeos, W_i filhos do mesmo sexo) e controles (A_i idade da mãe, B_i primogênito masculino):

Primeiro estágio:

$$D_i = \alpha_1 + \phi_t Z_i + \phi_s W_i + \gamma_1 A_i + \delta_1 B_i + e_{1i}$$

Segundo estágio:

$$Y_i = \alpha_2 + \lambda_{MQ2E} \hat{D}_i + \gamma_2 A_i + \delta_2 B_i + e_{2i}$$

- O MQ2E com dois instrumentos produz uma média ponderada dos LATEs gerados por cada instrumento individualmente.
- Combinar instrumentos **aumenta a precisão** (reduz o erro-padrão)
  - Se ambos os instrumentos forem fortes!

2.8 Resultados do primeiro estágio

TABLE 3.4

Quantity-quality first stages

	Twins instruments		Same-sex instruments		Twins and same-sex instruments
	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
Second-born twins	.320	.437			.449
	(.052)	(.050)			(.050)
Same-sex sibships			.079	.073	.076
			(.012)	(.010)	(.010)
Male		−.018		−.020	−.020
		(.010)		(.010)	(.010)
Controls	No	Yes	No	Yes	Yes

Notes: This table reports coefficients from a regression of the number of children on instruments and covariates. The sample size is 89,445. Standard errors are reported in parentheses.

O primeiro estágio dos gêmeos **aumenta** com controles: gêmeos são mais comuns em mães mais velhas, que teriam menos filhos

- a não inclusão poderia gerar viés de variável omitida e correlação do instrumento com o erro

O primeiro estágio do instrumento filhos do mesmo sexo é **estável** com ou sem controles: sexo do bebê é verdadeiramente aleatório

2.9 Resultados MQ2E

TABLE 3.5

OLS and 2SLS estimates of the quantity-quality trade-off

		2SLS estimates		
Dependent variable	OLS estimates (1)	Twins instruments (2)	Same-sex instruments (3)	Twins and same-sex instruments (4)
Years of schooling	−.145	.174	.318	.237
	(.005)	(.166)	(.210)	(.128)
High school graduate	−.029	.030	.001	.017
	(.001)	(.028)	(.033)	(.021)
Some college (for age ≥ 24)	−.023	.017	.078	.048
	(.001)	(.052)	(.054)	(.037)
College graduate (for age ≥ 24)	−.015	−.021	.125	.052
	(.001)	(.045)	(.053)	(.032)

Notes: This table reports OLS and 2SLS estimates of the effect of family size on schooling. OLS estimates appear in column (1). Columns (2), (3), and (4) show 2SLS estimates constructed using the instruments indicated in column headings. Sample sizes are 89,445 for rows (1) and (2); 50,561 for row (3); and 50,535 for row (4). Standard errors are reported in parentheses.

MQO: forte correlação negativa (−0,145) — viés de seleção

MQ2E: estimativas próximas de zero, não significativas — **nenhuma evidência de trade-off quantidade-qualidade**

O −0,145 do MQO está **fora do intervalo de confiança** do MQ2E ⟶ seleção explica a correlação