Regressão Descontínua: fuzzy

IBM0288 - 2026.2

Prof. Raphael Gouvea

0.1 Para reflexão

The Educational Impacts of School Phone Bans: Evidence from Brazil

Guilherme Lichand, Luca Moreno-Louzada, Thiago da Costa & Matthew Gentzkow

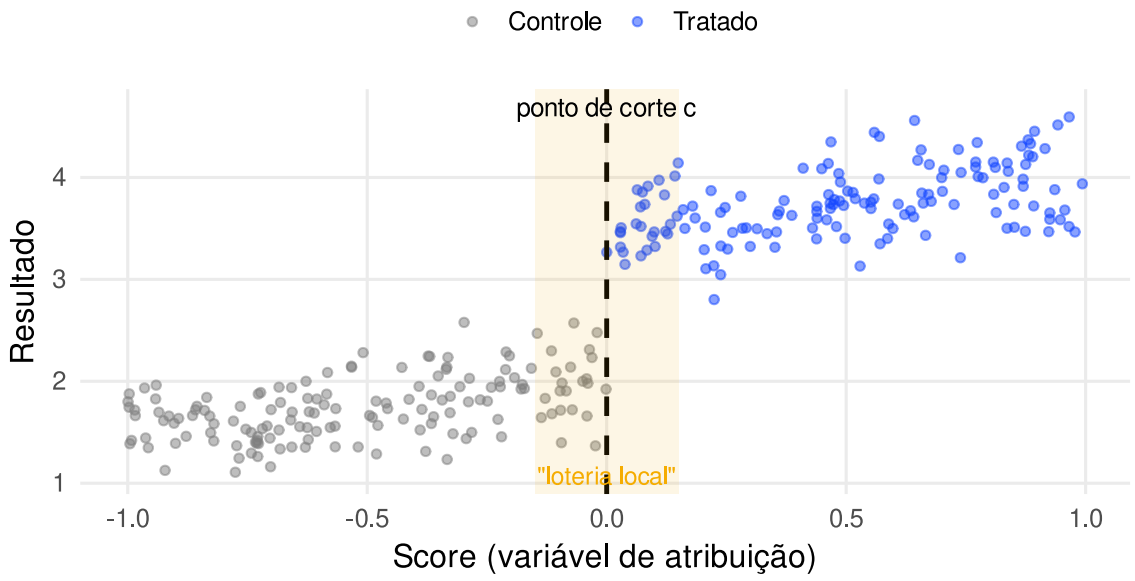
WORKING PAPER 35233 DOI 10.3386/w35233 ISSUE DATE May 2026

Concerns about negative impacts of student phone use have led to calls around the world for tighter restrictions on phones in schools. This paper evaluates the impact of a 2023 policy that banned non-pedagogical uses of phones within schools in Rio de Janeiro, Brazil. To isolate the causal effects of the policy, we contrast middle schools that already had strict rules on phone use prior to the policy ("control schools") to similar schools that did not have strict rules ("treatment schools"), before and after the ban. While restrictions were imperfectly implemented both before and after the ban, we show that in-school phone use fell substantially in treatment schools relative to control. We then show that test scores, which were trending similarly in the two groups prior to the ban, improved by 0.06 s.d. in treatment schools relative to control.

0.2 Aula passada: loteria local

Intuição RDD

Unidades *muito próximas* ao ponto de corte são quase idênticas: umas recebem o tratamento, outras não, **quase por acaso**.



0.3 Aula passada: tipos de RDD

Existem dois tipos de RDD:

1. **Sharp RDD (nítido):** o tratamento é uma **função determinística da variável de atribuição** (X).

- Exemplo: em eleições apertadas, a variável de atribuição é a **margem de vitória** e o corte é zero: quem tem margem positiva é eleito.

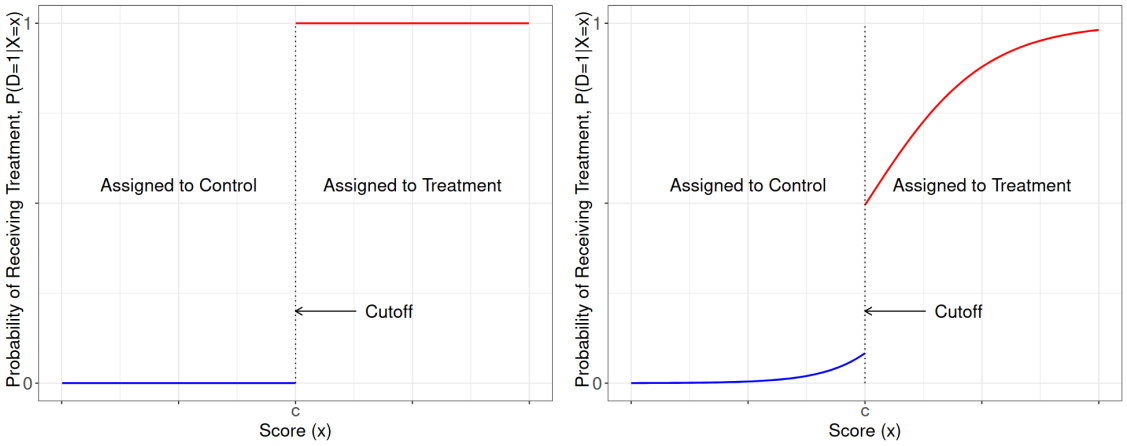
2. **Fuzzy RDD (difuso):** há uma **descontinuidade na probabilidade de tratamento** quando $X \geq c_0$. Neste caso, o indicador $\mathbf{1}(X_i \geq c_0)$ funciona como um **instrumento (IV)** para o tratamento (aula de hoje).

. . .

Observações:

- O desenho **fuzzy** é um tipo de **estratégia de variáveis instrumentais (IV)** e requer estimadores de **MQ2E**.
- O **sharp**, por outro lado, é uma forma **reduzida** de IV e não requer estimadores **MQ2E**.

0.4 Aula passada: prob. de tratamento



(a) Sharp RD (b) Fuzzy RD

Figure 3.1: Conditional Probability of Receiving Treatment in Sharp vs. Fuzzy RD Designs

0.5 Aula passada: atribuição Sharp

Atribuição determinística do tratamento

No desenho **Sharp**, o status de tratamento é uma **função determinística e descontínua** de uma variável X_i:

$$D_i = \begin{cases} 1, \text{se} & X_i \geq c_0 \\ 0, \text{se} & X_i < c_0 \end{cases}$$

onde c_0 é um **ponto de corte conhecido**.

Em outras palavras, se conhecemos o valor de X_i para uma unidade i, sabemos **com certeza** se ela recebeu o tratamento ou não.

0.6 O que é o desenho Fuzzy?

Na vida real, muitas políticas têm **adesão imperfeita**: a elegibilidade não garante o recebimento! **Exemplos:**

- Aluno elegível para bolsa (nota ≥ 60), mas não solicita a documentação
- Município elegível para programa federal, mas não adere
- Estudante abaixo do corte de renda (elegível) recusa subsídio por razões pessoais

! A distinção fundamental no fuzzy

No desenho fuzzy, temos **duas variáveis distintas**:

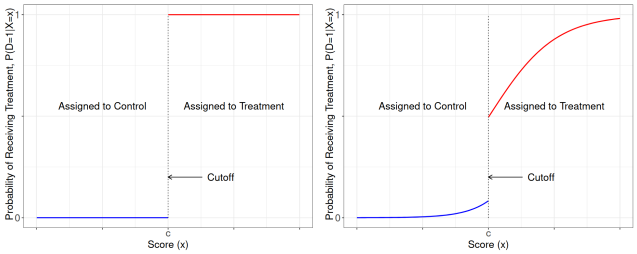
- $T_i = \mathbf{1}(X_i \geq c_0)$: **elegibilidade** (atribuição baseada no score)
- $D_i \in \{0, 1\}$: **tratamento efetivamente recebido**

O fuzzy ocorre quando $T_i \neq D_i$ para algumas unidades.

Notação: $D_i(t)$ é o tratamento que i receberia com elegibilidade $t \in \{0, 1\}$, e $Y_i(t, d)$ é o resultado potencial de i com elegibilidade t e tratamento d.

0.7 Relembrando: prob. de tratamento

No desenho fuzzy, a probabilidade de receber o tratamento **salta no corte, mas não vai de 0 a 1**:



(a) Sharp RD (b) Fuzzy RD

Figure 3.1: Conditional Probability of Receiving Treatment in Sharp vs. Fuzzy RD Designs

O **salto na probabilidade** de receber o tratamento é o **primeiro estágio** do estimador fuzzy/IV.

0.8 Tipos de adesão: quem é quem?

Podemos classificar as unidades em quatro tipos, de acordo com seu comportamento em relação à elegibilidade (igual na aula de IV):

- *Never-takers*: nunca recebem, independentemente da elegibilidade
- *Always-takers*: sempre recebem, independentemente da elegibilidade
- *Compliers*: recebem se elegíveis, não recebem se não elegíveis
- *Defiers*: fazem o oposto da elegibilidade

> ! Hipótese de monotonicidade
>
> Assumimos que não existem *defiers*: a elegibilidade nunca reduz a probabilidade de receber o tratamento.

0.9 RDD como IV: estimador

- Os desenhos **fuzzy** RDD são numericamente equivalentes e **conceitualmente semelhantes** a IV.
  - **"Forma reduzida" (numerador):** o salto na regressão do resultado sobre a variável de atribuição X.
  - **"Primeiro estágio" (denominador):** o salto na regressão do indicador de tratamento sobre X.
- As mesmas **hipóteses de IV**, advertências sobre *compliers* vs. *defiers* e testes estatísticos (como o teste F para instrumentos fracos) se aplicam.

Estimador de Wald do efeito do tratamento no Fuzzy RDD:

$$\delta_{\text{Fuzzy RDD}} = \frac{\lim_{x \downarrow c_0} E[Y \mid X = x] - \lim_{x \uparrow c_0} E[Y \mid X = x]}{\lim_{x \downarrow c_0} E[D \mid X = x] - \lim_{x \uparrow c_0} E[D \mid X = x]}$$

0.10 Três parâmetros, uma lógica

O desenho fuzzy produz três parâmetros relacionados:

1. ITT (*intention to treat*): Intenção de Tratar

Efeito da **elegibilidade** sobre o resultado, independentemente de quem realmente recebeu: $\tau_{ITT} = \mathbb{E}[Y_i(1, D_i(1)) - Y_i(0, D_i(0)) \mid X_i = c_0]$

2. Primeiro Estágio

Efeito da elegibilidade sobre a **probabilidade de receber** o tratamento: $\tau_{FS} = \mathbb{E}[D_i(1) - D_i(0) \mid X_i = c_0]$

3. FRD — Efeito Fuzzy RD

A razão dos dois efeitos anteriores: $\tau_{FRD} = \frac{\tau_{ITT}}{\tau_{FS}}$

0.11 Intuição do estimador de Wald

O estimador FRD é análogo ao estimador de **variáveis instrumentais** (IV):

Variáveis Instrumentais

$$\hat{\beta}_{IV} = \frac{\text{Cov}(Y, Z)}{\text{Cov}(D, Z)}$$

Z é o instrumento que afeta D mas não afeta Y diretamente.

Regressão Descontínua Fuzzy

$$\hat{\tau}_{FRD} = \frac{\hat{\tau}_{ITT}}{\hat{\tau}_{FS}} = \frac{\text{descont. em } Y}{\text{descont. em } D}$$

T_i é o "instrumento": afeta D (primeiro estágio) e Y apenas através de D, **localmente, no corte**.

> Interpretação causal
>
> Sob monotonicidade, τ_{FRD} identifica o efeito do tratamento para os ***compliers*** próximos ao corte c_0, ou seja, o LATE do desenho fuzzy.

0.12 Hipóteses e limitações do LATE

Hipóteses

- O **Fuzzy RDD** depende das mesmas hipóteses do **modelo IV padrão**: exclusão, primeiro estágio não nulo e monotonicidade.
- A hipótese de independência do IV é substituída pela **continuidade** dos resultados potenciais $Y_i(t, d)$ e do tratamento potencial $D_i(t)$ no corte c_0.
- Em RDD, os *compliers* são aqueles cujo status de tratamento muda quando movemos o valor de X_i de **logo à esquerda** para **logo à direita** de c_0.

Limitações

- Assim como em outros IVs, o Fuzzy RDD estima o **LATE**, ou seja, o **efeito médio local do tratamento** para o grupo de *compliers*.
- O efeito é **duplamente local**: vale só para os *compliers* e só para unidades **no corte**. Extrapolar para unidades longe do corte, ou para *never-takers* e *always-takers*, exige hipóteses adicionais (validade externa limitada).

1 Subsídio para ensino superior

1.1 *Ser Pilo Paga*

Pergunta: o subsídio Ser Pilo Paga (SPP) aumentou o acesso de estudantes pobres a instituições de ensino superior de alta qualidade na Colômbia?

Londoño-Vélez, Rodríguez e Sánchez (2020) estudam um programa de subsídio governamental na Colômbia que cobre **integralmente** a mensalidade em IES certificadas de alta qualidade:

- Voltado a estudantes de **alto mérito** e **baixa renda**
- Formalmente, é um **crédito condonável**: o empréstimo é perdoado se o aluno se formar. Além da mensalidade, inclui auxílio de manutenção
- Financia cursos de 4 ou 5 anos, mas exige que o aluno seja **admitido** em uma IES certificada pelo governo
- Primeira coorte de beneficiários: alunos que fizeram o SABER 11 (prova nacional equivalente ao Enem) no segundo semestre de 2014

1.2 Elegibilidade

Elegibilidade determinada por:

- **Mérito:** nota SABER 11 no *top 9%* nacional
- **Necessidade:** índice SISBEN (indicador de riqueza) abaixo do corte regional:

Região	Corte SISBEN
Zonas rurais	40,75
14 principais regiões metropolitanas	57,21
Demais áreas urbanas	56,32

Observação: no caso completo, há duas variáveis de atribuição de elegibilidade, o que levaria a um desenho multidimensional (não coberto no curso), mas analisamos aqui o caso unidimensional em que a amostra é restrita a alunos **acima** do corte de mérito no SABER 11.

1.3 Fuzzy RD: atribuição e adesão

Variável de atribuição: índice SISBEN (0 = mais pobre; 100 = mais rico)

- O corte é **normalizado para zero**: valores negativos indicam elegibilidade
- Intervalo observado na amostra: $-43,84 \leq X_i \leq 56,23$
- $T_i = 1$ se $X_i < 0$ (elegível ao subsídio)
- $D_i = 1$ se o aluno **efetivamente recebeu** o subsídio

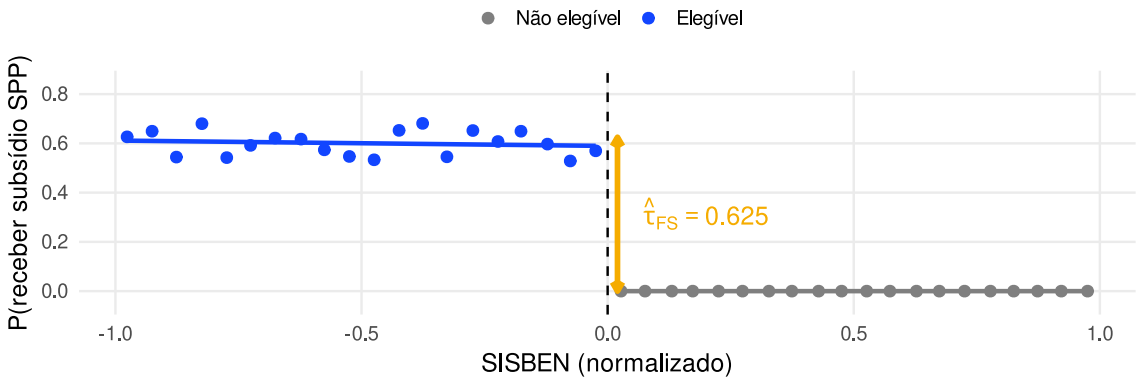
> ⚠ Aviso
>
> **Atenção:** aqui a convenção se inverte. O tratamento fica à **esquerda** do corte ($X_i < 0$), e não à direita ($X_i \geq c_0$) como nos slides anteriores.

Adesão

	N (%)
Elegíveis ($T_i = 1$)	66,7%
Receberam ($D_i = 1$)	40,0%

1.4 Visualizando o primeiro estágio

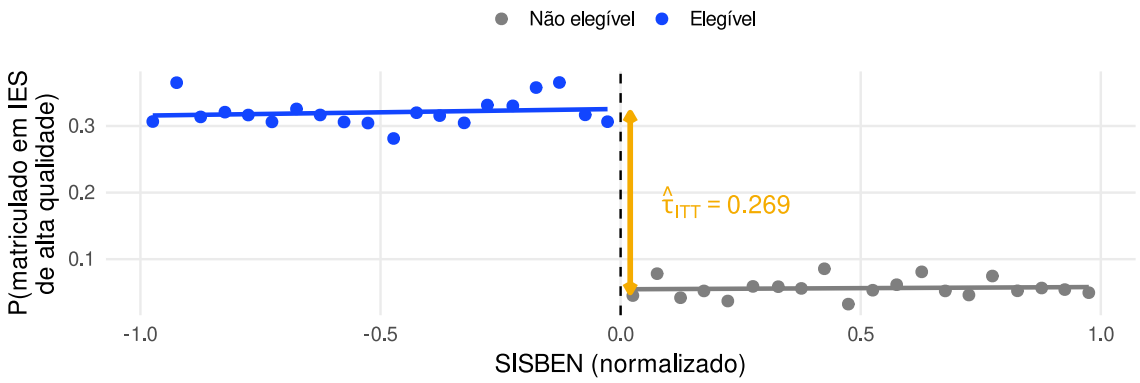
O primeiro passo é verificar se a elegibilidade **realmente aumenta** a probabilidade de receber o subsídio.



Dados simulados, calibrados com as estimativas do artigo.

O salto de 62,5 p.p. na probabilidade de receber o subsídio no corte é o **primeiro estágio**.

1.5 Os três parâmetros para o SPP



Dados simulados, calibrados com as estimativas do artigo.

$$\hat{\tau}_{FRD} = \frac{\hat{\tau}_{ITT}}{\hat{\tau}_{FS}} = \frac{0,269}{0,625} = 0,434$$

Para os ***compliers*** próximos ao corte, receber o SPP aumentou em **43,4 p.p.** a probabilidade de se matricular em uma IES de alta qualidade.

1.6 Resumo dos resultados SPP

Parâmetro	Estimativa	IC Robusto 95%
Primeiro estágio $\hat{\tau}_{FS}$	0,625	[0,595; 0,652]
ITT $\hat{\tau}_{ITT}$	0,269	[0,221; 0,328]
FRD $\hat{\tau}_{FRD}$	0,434	[0,366; 0,524]

Obs: Os ICs robustos (com correção de viés) **não são centrados** na estimativa pontual: isso é esperado.

Interpretação:

- No corte, 62,5% dos estudantes elegíveis efetivamente receberam o subsídio (primeiro estágio forte)
- A elegibilidade em si aumentou em 26,9 p.p. a matrícula em IES de alta qualidade (ITT)
- Para os *compliers* próximos ao corte, o efeito foi de 43,4 p.p. (LATE)

> Por que LATE > ITT?
>
> O ITT é "diluído" pelos não-*compliers*: estudantes elegíveis que não solicitaram o subsídio. O LATE recupera o efeito **apenas para quem respondeu ao incentivo**.

2 Avaliando a estratégia RDD

2.1 Teste de manipulação da variável de atribuição

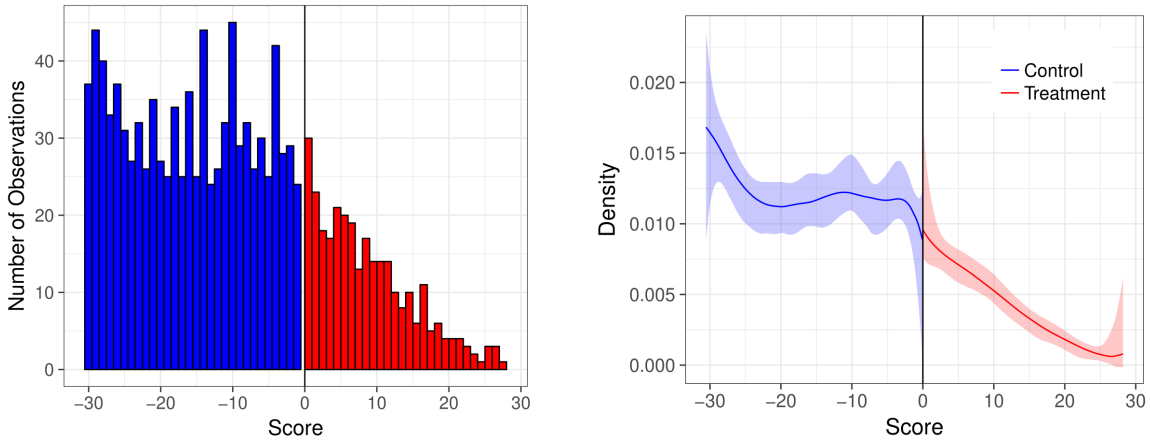
- O Teste de Densidade de McCrary é amplamente utilizado para verificar **manipulação na variável de atribuição** em RDD.
- Hoje, o padrão na literatura é o teste de **Cattaneo, Jansson e Ma (2020)**, implementado no pacote `rddensity`, que substitui o teste original de McCrary (2008). A lógica é a mesma.
- Hipóteses:
  - H_0 **(Nula):** a densidade da variável de atribuição é **contínua** no ponto de corte.
  - H_a **(Alternativa):** existe uma **descontinuidade** (salto) na densidade da variável de atribuição, sugerindo **manipulação** dos valores em torno do corte.

2.2 Interpretação

- Uma **descontinuidade significativa** na densidade indica **manipulação**, violando as hipóteses básicas de RDD.
- Não rejeitar H_0 **não garante** validade: alguns tipos de manipulação **não são detectáveis** por esse teste.
- Se houver **manipulação bilateral** (em ambos os lados do ponto de corte), o teste **pode não detectá-la**: isso acontece quando os fluxos nos dois sentidos se compensam e a densidade continua contínua no corte.

2.3 Teste de McCrary

Figure 19: Histogram and Estimated Density of the Score



(a) Histogram

(b) Estimated Density

2.4 Balanço de covariáveis

- Se as unidades logo acima e logo abaixo do corte são "quase idênticas", as **covariáveis pré-determinadas** (medidas antes do tratamento) não devem saltar no corte.
- **Teste:** estimar o próprio RDD usando cada covariável como variável dependente (ex.: sexo, idade, escolaridade dos pais). Espera-se um efeito **estatisticamente nulo** em todas.
- Um salto em alguma covariável sugere que as unidades dos dois lados do corte são diferentes, o que compromete a hipótese de continuidade.
- É, junto com o teste de densidade, o teste de validação **mais usado** em RDD.

2.5 Notas de corte placebo

Se a estratégia de identificação é correta, não devemos encontrar um efeito do tratamento se estimarmos o modelo em notas de corte fictícias.

Os cortes fictícios devem ser estimados usando apenas as observações de **um lado** do corte verdadeiro, para não contaminar a estimativa com o efeito real.

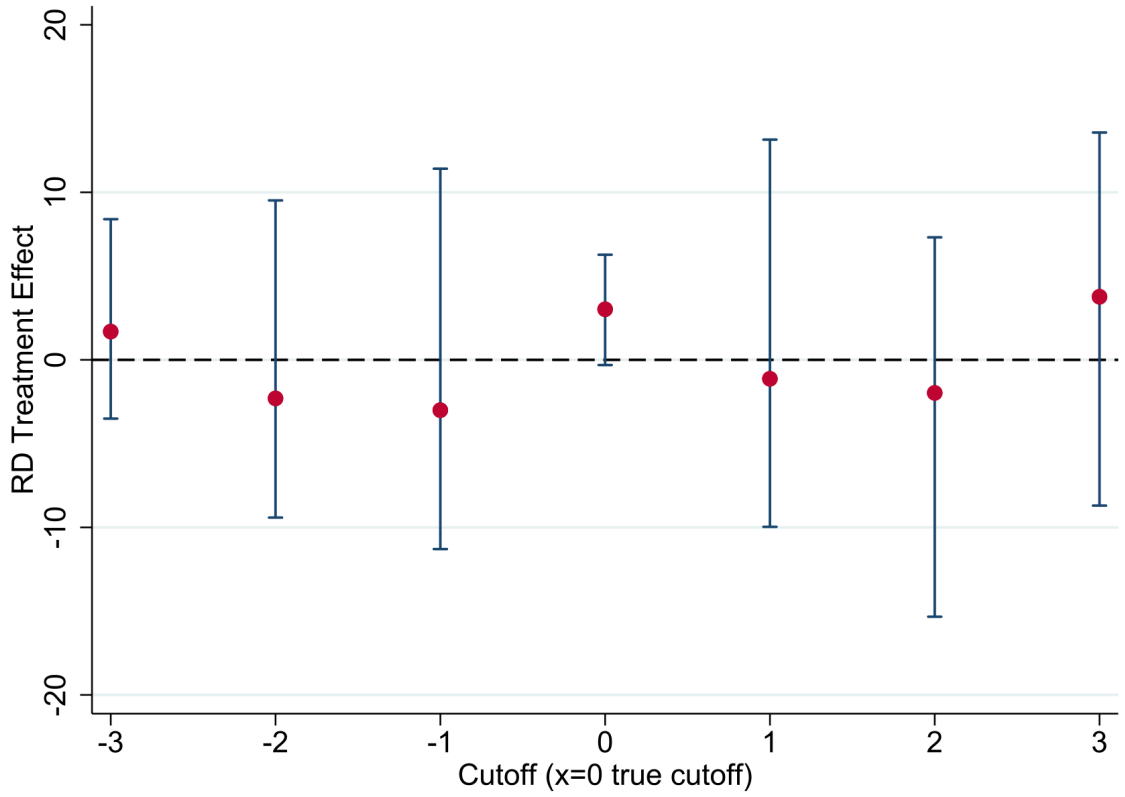


Figure 20: RD Estimation for True and Artificial Cutoffs

2.6 Estimação: sobre bandwidths e regressões locais

Intuição sobre bandwidths: ShinyApp sobre bandwidths

Intuição sobre Regressão Local: Animação de Regressão Linear Local

2.7 Resumo da aula

Sharp vs. fuzzy

- **Sharp:** o tratamento é determinado pelo corte ($D_i = T_i$).
- **Fuzzy:** o corte muda só a **probabilidade** de tratamento; T_i funciona como instrumento para D_i.

Três parâmetros

- **Primeiro estágio** (τ_{FS}): salto na probabilidade de tratamento no corte.
- **ITT** (τ_{ITT}): salto no resultado no corte (forma reduzida).
- **FRD** ($\tau_{FRD} = \tau_{ITT}/\tau_{FS}$): LATE dos *compliers* no corte.

Checklist de validação

- Primeiro estágio forte (teste F para instrumentos fracos)
- Densidade contínua no corte (`rddensity`)
- Covariáveis pré-determinadas balanceadas no corte
- Ausência de efeito em cortes placebo
- Robustez à escolha do bandwidth